

個案研習素材

地球與太空

穿梭太空：物理在地球以外的應用

目錄

| | |
|-------------|---|
| 個案內容：設計三級火箭 | 1 |
| 活動指引 | 2 |
| 評估 | 4 |
| 補充工作紙 | 5 |

個案提供：(物理系) 湯兆昇博士
任向榮生生



個案內容

設計三級火箭

在二十世紀中期，人類憧憬能到太空旅行。當時，美國和蘇聯都積極研究，希望成為第一個國家發射人造衛星繞地球運行。

假設你們是當時美國政府轄下的一隊研究太空計劃的工程師。你們研究了火箭的基本方程式後，發現要以火箭推動載荷（例如衛星）至高速，使之環繞地球運行是非常困難的。其中一位隊員提出以多級火箭推動載荷的想法。多級火箭分為數截，每截火箭分別在發射後不同的階段推動載荷。當第一截火箭耗盡燃料後，便會被棄掉，由第二截火箭補上，繼續推動載荷。由於第一截火箭被棄掉，火箭的總質量減少了，令火箭加速得更快。

這個構思十分好，所以你計劃向上司提出研製三級火箭的建議。現在你們的任務是將三級火箭與相同質量的普通火箭作比較，簡單估計一下三級火箭有何優勝之處。你們必須證明利用三級火箭將載荷加速，能達到更高的最終速度。另一個重要的問題是，你們要計算出，若要把載荷推動至最高速度，三截火箭的質量分別是多少。換句話說，如果 M_1 、 M_2 及 M_3 分別是第一、第二和第三截火箭的質量，你們要計算出 $M_1 : M_2 : M_3$ 的比例，使總質量為 $M = M_1 + M_2 + M_3$ 的三級火箭推動載荷至最高的速度。最後，若 M_L 為載荷的質量，你們要估計如要使用三級火箭推進載荷，使它成功進入環繞地球運行的軌道時， $M : M_L$ 的最低比例是多少。

為避免三級火箭的構思遭人盜用，你們必須盡快完成計算工作並向上司提交報告。因此，你們需要作出很多假設，得出一個簡化了的三級火箭模型。簡化後的模型雖然不夠真實，但它已經能把三級火箭與普通火箭的差別清楚地展示出來。所有組員都必須徹底了解問題的解決方法，並準備隨時解答上司的疑問。

活動指引

學習流程

此個案研習適合在 30 人的班內以 5 人一組進行。老師會為你們分組。

活動會在兩個不同上課天的連堂中進行 (各 90 分鐘, 合共 180 分鐘)。在第二節連堂前, 每組均需解決所有問題並準備一個簡短口頭報告。

1. 了解任務 (15 分鐘)

請用 15 分鐘閱讀個案故事, 再與組員討論關於個案和問題的構思。

2. 課堂教導 (75 分鐘)

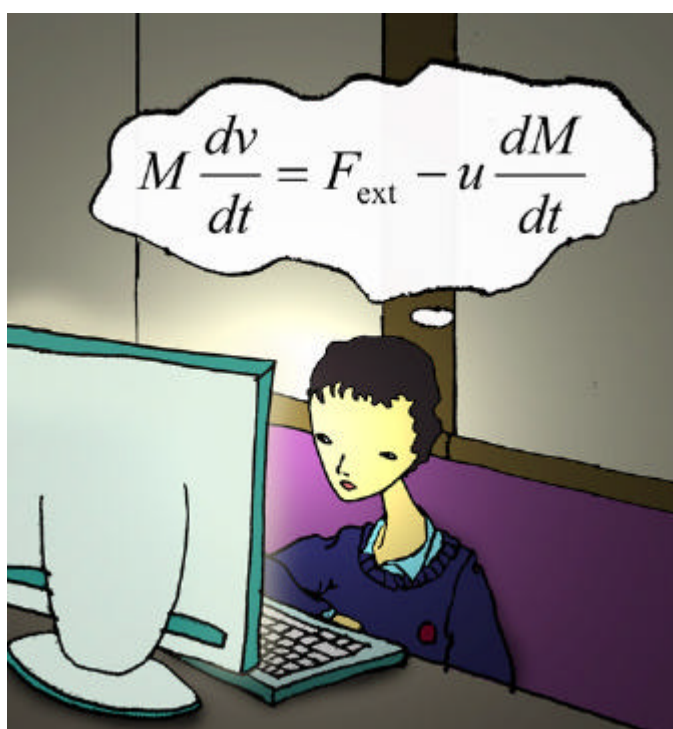
老師會在課堂上

- ◆ 簡單介紹二十世紀火箭發展的歷史
- ◆ 根據牛頓運動第二定律教授火箭運動背後的物理原則
- ◆ 推導火箭的最終速度與質量改變的關係
- ◆ 解釋為何把火箭加速至很高的速度是非常困難的
- ◆ 介紹三級火箭的概念, 簡單解釋相同質量的三級火箭比普通火箭的優勝之處
- ◆ 引導學生探討教學筆記中的問題, 從而完成任務
- ◆ 派發 Microsoft Excel「規劃求解」工具的應用指南。「規劃求解」的應用指南亦可在以下網址找到:

<http://www.cuhk.edu.hk/sci/case-learning/physics.htm>

3. 小組討論、準備及工作 (課後, 一星期內)

- ◆ 每組各自在課後一星期內完成工作: 解決問題並準備簡短的口頭報告。
- ◆ 解決問題包括回答教學筆記中的問題, 從而完成個案故事中的兩大任務。



在科學科目上應用「個案基礎學習法」以促進「學會學習」

- ◆ 每組必須自行就任務內容進行討論，確定所有組員都了解問題並懂得解題技巧。如有組員不清楚問題，必須立即請教老師。
- ◆ 在分組工作的一星期內，老師會約見個別組別以觀察其工作進度並給予額外指導。

4. 口頭報告及班上討論 (90 分鐘)

每組學生均有 15 分鐘時間，就他們的工作及建議向上司作出口頭報告。學生在口頭報告中以工程師的身份介紹他們的工作，而老師及其他組別的學生則可扮演上司向該組提出問題。

最後，老師會總結學生的研習結果並就其口頭報告提出評語。老師根據評分指引，給予分數。

在科學科目上應用「個案基礎學習法」以促進「學會學習」

評估

你的老師將基於下表評核你的表現，當你收到評核結果時，你應了解自己甚麼做得好，和有哪裏需要改善。

| | | 需要改善 | 普通 | 良好 | 優秀 |
|-----------|--------------------|------|--------|--------|--------|
| 了解事件 10% | 清楚明白個案及能夠指出關鍵議題 | 0-2% | 4-6% | 8% | 10% |
| 證據及數字 10% | 找尋並引述適當切題的證據和數字 | 0-2% | 4-6% | 8% | 10% |
| 分析 25% | 正確的計算、推論及批判性的評估 | 0-9% | 10-14% | 15-20% | 21-25% |
| 解題 10% | 建議清楚合理 | 0-2% | 4-6% | 8% | 10% |
| 報告結構 10% | 報告結構良好 | 0-2% | 4-6% | 8% | 10% |
| 清楚 5% | 報告時講解清楚 | 0-1% | 2-3% | 4% | 5% |
| 視像輔助 5% | 報告時利用視像工具輔助 (如圖像等) | 0-1% | 2-3% | 4% | 5% |
| 回應 10% | 對提問回答恰當 | 0-2% | 4-6% | 8% | 10% |
| 守時 5% | 準時完成工作 | 0-1% | 2-3% | 4% | 5% |
| 團隊精神 10% | 組員之間互相合作 | 0-2% | 4-6% | 8% | 10% |

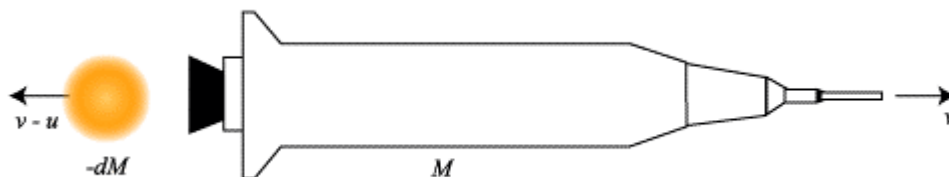
其他意見

| |
|--|
| |
|--|

補充工作紙

基本火箭方程

讓我們以牛頓運動第二定律推出基本的火箭方程。對中六學生來說，這不是一個容易的問題，因為火箭的質量會隨時間不斷改變，事實上當火箭不斷排氣時，其質量會急劇下降。



假設在某時間 t ，火箭質量為 M ，速度為 v ，以 $-u$ 的速度排放氣體（負號表示氣體與火箭運動方向相反）。排氣速度 $-u$ 是相對於火箭而言的，它的值視乎火箭的設計和燃料種類而定。由於火箭以速度 v 運動，排出的氣體相對於地面的速度是 $v-u$ 。

現在假設在短時間 Δt 內火箭排放了一些氣體，火箭的質量因此由 M 變成 $M + \Delta M$ （由於火箭質量正減少，所以 $\Delta M < 0$ ），而火箭的速度由 v 變成 $v + \Delta v$ 。被排放出來的氣體質量為 $-\Delta M$ ，而氣體相對於地面的最終速度為 $v-u$ 。因此，在時間 Δt 中，整個系統（火箭 + 在時間 Δt 中排放出來的氣體）的動量轉變為

$$\Delta P = \underbrace{(M + \Delta M)(v + \Delta v)}_{\text{火箭最終動量}} - \underbrace{\Delta M(v - u)}_{\text{氣體動量}} - \underbrace{Mv}_{\text{火箭的起始動量}} \quad (1)$$

由此得出

$$\Delta P = M\Delta v + u\Delta M \quad (2)$$

當中的二次項 $\Delta M\Delta v$ 已略去。根據牛頓第二定律，施予在系統上的外力 F_{ext} 與動量改變率相等：

$$F_{\text{ext}} = \frac{dP}{dt} \quad (3)$$

把 (2) 除以 Δt ，以 $\Delta t \rightarrow 0$ 為極限，得到

$$\boxed{M \frac{dv}{dt} = F_{\text{ext}} - u \frac{dM}{dt}} \quad (4)$$

這就是基本的火箭方程。

一般來說，方程式 (4) 不易求解，尤其是在外力隨速度變化的情況下。在 $F_{\text{ext}} = 0$ 時，我們可以輕易求得 (4) 的解。將 (4) 乘以 dt 並加以整理，得到

$$dv = -u \frac{dM}{M} \quad (5)$$

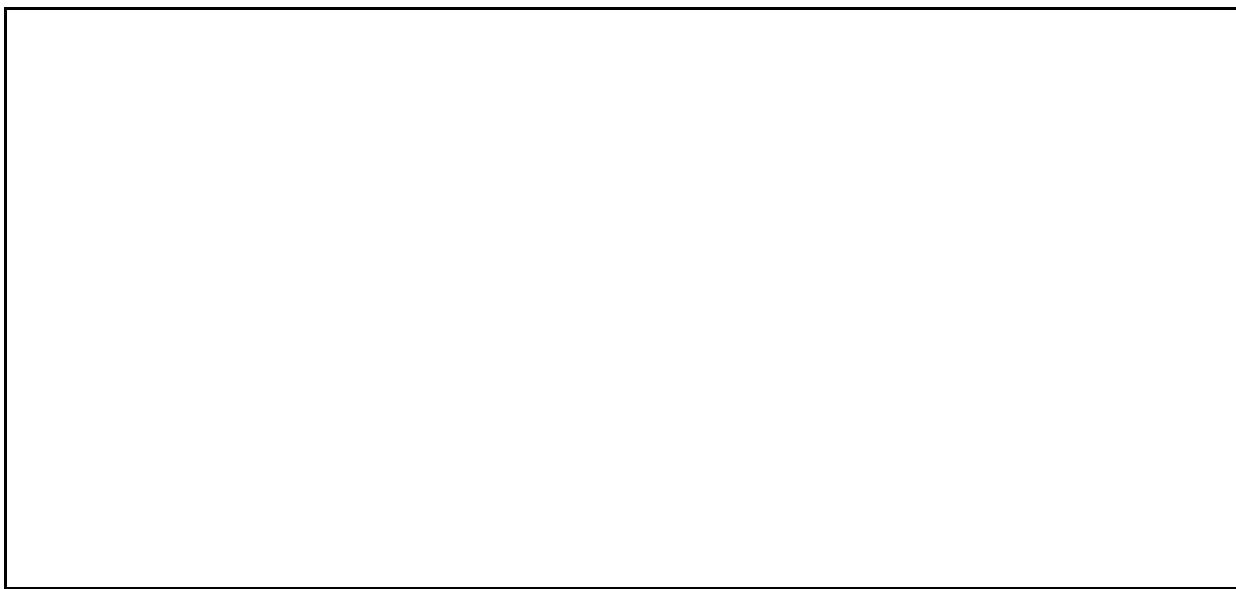
在科學科目上應用「個案基礎學習法」以促進「學會學習」

積分可得

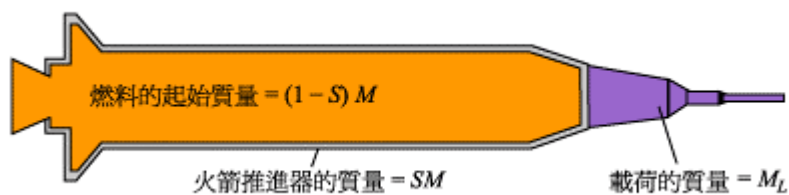
$$\Delta v = v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (6)$$

其中 i 和 f 分別代表起始和最終值。

1. 假設火箭從地球表面發射，你認為 $F_{\text{ext}} = 0$ 的假設是否合符事實？如果不是的話，有甚麼外力存在？在甚麼情況下這些外力會變得重要？



載荷與結構因子



考慮如圖所示的簡化火箭模型。它由三部分組成：沒有燃料的火箭推進器，起始時的燃料及載荷。設 M 是火箭推進器和起始燃料的總質量， M_L 是載荷的質量。結構因子 S 的定義為：

$$S = \frac{\text{沒有燃料的火箭推進器的質量}}{\text{火箭推進器和起始時燃料的總質量}} \quad (7)$$

注意 $0 < S < 1$ 。 S 只視乎火箭的設計而定，與載荷並沒有關係。

在科學科目上應用「個案基礎學習法」以促進「學會學習」

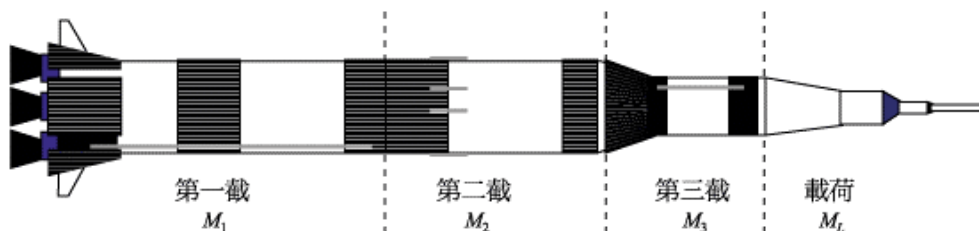
2. 考慮火箭連同起始燃料及載荷一同發射，整個系統的起始質量 M_i 是多少？當所有燃燒耗盡後，系統的最終質量 M_f 是多少？以 M , M_L 及 S 表示答案。

3. 將火箭系統的最終速度以 M , M_L and S 表示。

4. S 及 M/M_L 的值要怎樣才可令火箭最後以高速運動？這些條件背後有甚麼物理意義？

5. 要製造一枝運動速度遠比排氣速度 u 高的火箭是否容易？你如何知道呢？

三級火箭



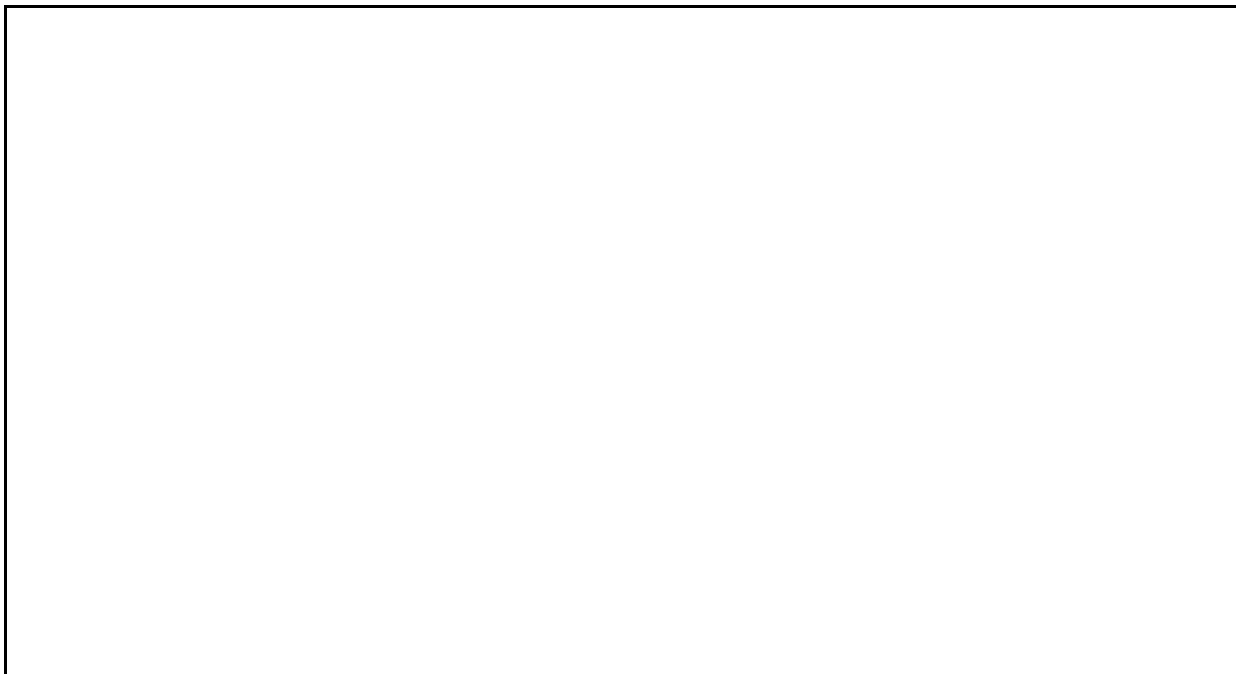
現在我們考慮如圖所示的三級火箭，由靜止發射。設 M_1, M_2 和 M_3 分別是第一、第二及第三截火箭的起始質量（包括燃料的質量在內）。當第一截火箭耗盡燃料時，系統的質量變為 $SM_1 + M_2 + M_3 + M_L$ ，由此可得火箭系統的速度改變 Δv_1 。同樣地，我們可以得到第二及第

在科學科目上應用「個案基礎學習法」以促進「學會學習」

三截火箭使用過程中，火箭系統的速度改變。設在第 k 截火箭使用過程中，火箭系統的速度改變為 $\Delta v_k = u \ln N_k$ ，在第三階段終結時，火箭的最終速度便是

$$v = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 = u \ln N_1 + u \ln N_2 + u \ln N_3 \quad (8)$$

6. 計算 N_1, N_2 和 N_3 ，答案以 M_1, M_2, M_3, M_L 和 S 表示。



在科學科目上應用「個案基礎學習法」以促進「學會學習」

三級火箭的最佳化問題

除了回答以上問題外，每組亦須完成以下任務。

任務 1：如火箭的總質量為 M ，求出當最終速度 v 為最大值時， $M_1:M_2:M_3$ 的最佳比例。

- ◆ 這個問題可用 Microsoft Excel 的「規劃求解」工具解決。老師會派發「規劃求解」的運用指南給學生。

以下提示或可幫助你解決問題：

- ◆ 由於最終速度只視乎排氣速度和某些質量比例，而問題只需求得 $M_1:M_2:M_3$ 的比例，因此我們可以隨意選擇質量的單位去簡化計算；其中一個方便的選擇是把火箭系統的總質量 M 設定為一個單位，問題因此簡化為：在 $M_1 + M_2 + M_3 = 1$ 的限制下，求 v 的最佳值。啟動 Excel 試算表，將 M_1 、 M_2 和 M_3 的值輸入同一列內。在 M_1 、 M_2 的貯存格內可輸入兩個任意的起始值，只需滿足 $M_1 + M_2 < 1$ 便可。由此可利用 $M_3 = 1 - M_1 - M_2$ 去決定 M_3 的值。
- ◆ 把某些 S 、 M_L 和 u 的值輸入試算表的貯存格內，建議嘗試 $S = 0.05$ 和 $M_L = 0.1$ 。典型的排氣速度為 2600 ms^{-1} 。根據以上數據，利用試算表求得 v 。
- ◆ 再利用「規劃求解」工具找出 v 的最大值，可變參數為 M_1 和 M_2 ，將所求得的最佳速度，與相同質量 M 和結構因子 S 的單級火箭比較。

在以下空格總結你的結果及解釋：

在科學科目上應用「個案基礎學習法」以促進「學會學習」

任務 2：假設我們要發射一個人造衛星到進入很接近地面的「近地軌道」。假設上述的結構因子及排氣速度， M/M_L 的最小值是多少，才能使衛星加速至環繞軌道所需的速率？火箭加速時，可忽略火箭的重量和空氣阻力的影響。

(地球半徑 = 6370 km，地球質量 = 5.97×10^{24} kg)

以下提示或可幫助你解決問題：

- ◆ 如何利用牛頓運動第二定律來求得衛星的軌道速率？
- ◆ 如果要在試算表中改變 M_L 的值，從而得到較高的最終速率，你應該增加 M_L 的值，還是減少它的值呢？當你每次嘗試改變 M_L 時，不要忘記求得最終速率的最佳值。
- ◆ 反復試驗，找出能把衛星推進近地軌道時， M/M_L 的最小值。相應的 $M_1:M_2:M_3$ 最佳值是多少？
- ◆ 相同質量和結構因子的單級火箭能否達到這速率？

在以下空格總結你的結果及解釋：